1) SPAZI NORMATI ζ-CONVESSI

1.1. Sia $(X,\|\cdot\|)$ uno spazio normato. Chiamiamo $Z(X,\|\cdot\|)$ l'insieme delle funzioni ξ: $X\mathrm{x}X \to R$ tali che:

(a) $\xi(x,y) = \xi(y,x)$

(b) $\forall y \in X \quad x \to \xi(x,y)$ è convessa (e quindi lo è anche $x \to \xi(y,x)$)

(c) $\xi(0,0) > 0$

(d) $(1-\|x\|)(1-\|y\|) \leq 0 \Rightarrow \xi(x,y) \leq \|x+y\|$

Lo spazio normato $(X,\|\cdot\|)$ si dice ζ-convesso quando $Z(X,\|\cdot\|) \neq \emptyset$

1.2. Osserviamo che il funzionale $(x,y) \to \|x+y\|$ verifica (a), (b), (d) di 1.1; pertanto la condizione (c) è necessaria per impedire che la definizione di spazio normato ζ-convesso includa ogni spazio normato. Sulla sua sufficienza si veda oltre (§ 2 e 3).

1.3. Elenchiamo alcune proprietà formali dell'insieme $Z(X,\|\cdot\|)$. S'intende che $X \neq \{0\}$ è uno spazio vettoriale su $K\in\{R,C\}$.

(a) Se $\xi\in Z(X,\|\cdot\|)$ e $c\in]0,1]$, allora $c\xi\in Z(X,\|\cdot\|)$

(b) Se $\xi\in Z(X,\|\cdot\|)$ e $\|x\|=1$, allora $\xi(x,-x) \leq 0$

(c) Se $\xi_j\in Z(X,\|\cdot\|)$ $(j=1,2)$ e $t\in[0,1]$, allora $(1-t)\xi_1+t\xi_2\in Z(X,\|\cdot\|)$

(d) Se $\xi\in Z(X,\|\cdot\|)$ e $\alpha\in K$ con $|\alpha|=1$, allora il funzionale $(x,y)\to\xi(\alpha x,\alpha y)$ appartiene a $Z(X,\|\cdot\|)$

(e) Se $\xi\in Z(X,\|\cdot\|)$, allora $\exists\eta\in Z(X,\|\cdot\|)$ tale che $\eta(0,0)= \xi(0,0)$ e $\eta(-x,-y) = \eta(x,y) \quad \forall(x,y)\in X\mathrm{x}X$

(f) Se $\xi\in Z(X,\|\cdot\|)$ e $\max\{\|x\|,\|y\|\} \leq 1$, allora $\xi(x,y) \leq 1+ \|x\|\,\|y\|$; in particolare $\xi(0,0) \leq 1$.

Proviamo (f), le altre essendo più o meno banali. Anzitutto da 1.1 (b), (d) segue che, fissato x_0 con $\|x_0\|=1$, $\xi(0,0) \leq \frac{1}{2}\,\xi(x_0,0) + \frac{1}{2}\,\xi(-x_0,0) \leq 1$. Se poi $0 < \|x\| \leq 1$, allora $\xi(x,0) \leq \|x\|\ \xi(\frac{x}{\|x\|},0) + (1-\|x\|)\xi(0,0) \leq \|x\|+1-\|x\|=1$ e analogamente $\xi(0,x) \leq 1$. Infine $\max\{\|x\|,\|y\|\} \leq 1 \Rightarrow \xi(x,y) \leq \|x\|\xi(\frac{x}{\|x\|},y) +$ $+ (1-\|x\|)\xi(0,y) \leq \|x\|(1+\|y\|)+1-\|x\|=1+\|x\|\ \|y\|$.

1.4. Se in 1.1 sostituiamo (d) con

$$(d_1) \qquad \max\{\|x\|,\|y\|\} \geq 1 \Rightarrow \xi(x,y) = \|x+y\|$$

otteniamo la descrizione di un sottoinsieme $Z_1(X,\|\cdot\|)$ di $Z(X,\|\cdot\|)$. Tuttavia $\forall\xi \in Z(X,\|\cdot\|)\ \exists\eta \in Z_1(X,\|\cdot\|)$ tale che $\xi(0,0) = \eta(0,0)$: basta porre $\eta(x,y) =$ $= \max\{\xi(x,y), \|x+y\|\}$ per $\max\{\|x\|,\|y\|\} \leq 1$ (e ovviamente $\eta(x,y) = \|x+y\|$ per $\max\{\|x\|,\|y\|\} \geq 1$) .

Potendo così fissare i valori di η fuori dal quadrato di $S_1=\{x \in X; \|x\|<1\}$, e tenuto conto di 1.3(f) per ciò che accade in $S_1 x S_1$, è facile provare che:

1.5 Se X è ζ-convesso e $\gamma(X,\|\cdot\|) = \sup_{\xi \in Z(X,\|\cdot\|)} \xi(0,0)$, allora

$\exists\eta \in Z(X,\|\cdot\|)$ (in realtà $\eta \in Z_1(X,\|\cdot\|)$ tale che $\eta(0,0) = \gamma(X,\|\cdot\|)$.

Basta infatti porre $\eta(x,y) = \sup_{\xi \in Z_1(X,\|\cdot\|)} \xi(x,y)$.

1.6. E' ragionevole ritenere che, se $(X,\|\cdot\|)$ è ζ-convesso, $\gamma(X,\|\cdot\|)$ (definito come in 1.5), che appartiene a $]0,1]$ per 1.3(f), dia una misura della rotondità della norma. Per lo meno si sa che $\|\cdot\|$ deriva da un prodotto scalare se e solo se $\gamma(X,\|\cdot\|)=1$ (se $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$, posto $\xi(x,y) = 1+\mathrm{Re}\,\langle x,y\rangle$ si prova facilmente che $\xi \in Z(X,\|\cdot\|)$; una dimostrazione non difficile ma estremamente lunga dal fatto che l'esistenza di $\xi \in Z(X,\|\cdot\|)$con $\xi(0,0)=1$ implica l'identità del parallelogramma si trova in [BUR3]). Si noti tuttavia che quantunque si sappia per altra via (v. §§ 2,3) che, per esempio, tutti gli L^p per funzioni a valori scalari, con $1<p<\infty$, sono ζ-convessi, nessuno ha finora (a quanto se ne sa) scritto

esplicitamente un funzionale che verifichi la proprietà 1.1 eccetto che nel caso di uno spazio con prodotto scalare.

1.7. Benché nella definizione di ζ-convessità intervenga la norma, la ζ-convessità è una proprietà topologica. Infatti se $(X,\|\cdot\|_X)$ e $(Y,\|\cdot\|_Y)$ sono spazi normati e $T:X \to Y$ è un omeomorfismo lineare con $\alpha\|x\|_X \leq \|Tx\|_Y \leq \beta\|x\|_X$ $\forall x \in X$, allora fissata $\xi \in Z_1(Y,\|\cdot\|_Y)$(v. 1.4), si ha che $(x_1, x_2) \to \eta(x_1,x_2) = \frac{\alpha}{\beta}\,\xi(\alpha^{-1}Tx_1, \alpha^{-1}Tx_2)$ appartiene a $Z_1(X,\|\cdot\|_X)$. Come è da attendersi, comunque, in questo trasferimento qualcosa si perde, perché $\eta(0,0) = \frac{\alpha}{\beta}\,\xi(0,0) \leq \xi(0,0)$.

Viceversa, se $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ sono norme sullo spazio vettoriale X e

$\xi \in Z(X,\|\cdot\|_1) \cap Z(X,\|\cdot\|_2)$, allora $\forall x \in X$

$$\xi(0,0)\ \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \xi(0,0)^{-1}\ \|x\|_1$$

(v. [BUR2], Th. 4.1), e in particolare se $\zeta(0,0)=1$ c'è un'unica norma (che per di più deriva da un prodotto scalare) tale che $\xi\ \ Z(X,\|\cdot\|)$.

2. MARTINGALE

In questo paragrafo sono fissati uno spazio di Banach X su $K \in \{R\ C\}$ e uno spazio con misura positiva e finita $(\Omega,\mathscr{S},\mu)$.

2.1. Teorema. Sia $\mathscr{U}$ una sotto-σ-algebra di $\mathscr{S}$. $\forall f \in L^1(\Omega,\mathscr{S},\mu;X)$ esiste una e una sola (a meno di uguaglianza μ-q.d.) funzione

$g \in L^1(\Omega,\mathscr{U},\mu;X)$ tale che $\forall A \in \mathscr{U}$

$\int_A g\,d\mu = \int_A f\,d\mu$. Chiamando $E(f|\mathscr{U})$ tale funzione si ha inoltre che $\forall p \in [1,\infty[$ la

restrizione di $E(\cdot|\mathscr{U})$ a $L^p(\Omega,\mathscr{S},\mu;X)$ è un proiettore lineare e continuo di $L^p(\Omega,\mathscr{S},\mu;X)$ in sé, con norma ≤ 1, il cui codominio è $L^p(\Omega,\mathscr{U},\mu;X)$. Inoltre se $f\in L^p(\Omega,\mathscr{S},\mu;R)$ e $f\geq 0$, è anche $E(f|u)\geq 0$.

Cenno di dimostrazione (v. [D-U]. Th. V.1.4). Si prova il teorema quando $X = K$ utilizzando il teorema di Radon-Nikodym (per l'esistenza di $E(f|u)$) e la disuguaglianza di Jensen (per la stima L^p). Nel caso generale si definisce $E(f|u) = \sum_{j=1}^{m} E(\chi_{A_j}|\mathscr{U})x_j$ quando $f = \sum_{j=1}^{m} \chi_{A_j} x_j$ è semplice, si prova che l'operatore $E(\cdot|\mathscr{U})$ sullo spazio delle funzioni semplici ha le richieste proprietà e si prolunga per continuità.

Si osservi che non è richiesto che X abbia la proprietà di Radon-Nikodym.

2.2. Definizione. Sia $\mathscr{F}= (\mathscr{F}_n)_{n\in N}$ una successione non decrescente di sotto-σ-algebre di $\mathscr{S}$ e $F = (f_n)_{n\in N}$ una successione in $L^p(\Omega,\mathscr{S},\mu;X)$ (dove $p\in[1,\infty[$). Si dice che F è una martingala relativa a $\mathscr{F}$ se e solo se $\forall n\in N$ $f_n = E(f_{n+1}|\mathscr{F}_n)$. Ciò evidentemente implica che $\forall n\in N$ $f_n\in L^p(\Omega, \mathscr{F}_n,\mu;X)$ e $\|f_n\|_{L^p} \leq \|f_{n+1}\|_{L^p}$.

Se poniamo $\phi_1 = f_1$, $\phi_{n+1}= f_{n+1} - f_n$, in modo che $f_n = \sum_{k=1}^{m} \phi_k$, la condizione che F sia una martingala relativa a $\mathscr{F}$ equivale a

(a) $\quad \forall n\in N \quad \phi_n\in L^p(\Omega, \mathscr{F}_n,\mu;X)$ ed $E(\phi_{n+1}|\mathscr{F}_n)=0$

A sua volta la condizione che sia $E(\phi_{n+1}|\mathscr{F}_n) = 0$ $\forall n$ si può esprimere equivalentemente così:

(b) $\quad \forall n\in N$ e per ogni funzione continua e limitata $G:X^n \to R$

$$\int_\Omega G(\phi_1(s),\dots,\phi_n(s))\phi_{n+1}(s)d\mu(s) = 0$$

2.3. ESEMPI

(a) Sia $f \in L^p(\Omega, \mathscr{S}, \mu; X)$ $(1 \leq p < \infty)$ e, fissata una successione $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_n)_{n \in N}$ di sotto-σ-algebre di $\mathscr{F}$, sia $f_n = E(f \mid \mathscr{F}_n)$ $\forall n$. Allora $F = (f_n)_{n \in N}$ è una martingala relativa a $\mathscr{F}$ perché le proprietà dei proiettori assicurano che

$$E(E(f \mid \mathscr{F}_{n+1}) \mid \mathscr{F}_n) = E(f \mid \mathscr{F}_n)$$

E' noto ([D-U] Ch. V § 2) che una martingala $F = (f_n)_{n \in N}$ è convergente in $L^p(\Omega, \mathscr{S}, \mu; X)$ se e solo se è di questo tipo, e in tal caso il suo limite è $E(f \mid \mathscr{F}_\infty)$, dove $\mathscr{F}_\infty$ è la σ-algebra generata da $\bigcup_{n \in N} \mathscr{F}_n$.

(b) Sia $\Omega = [0,T[$, $\mathscr{S}$ la σ-algebra dei boreliani di $[0,T[$, μ la misura di Lebesgue su $\mathscr{S}$. $\forall n \in N$ sia $0 = t_{n,0} < \ldots < t_{n,q_n} = T$ e supponiamo che $\{t_{n,0}, \ldots, t_{n,q_n}\} \subseteq \{t_{n+1,0}, \ldots, t_{n+1,q_{n+1}}\}$ cosicché ogni intervallo $I_{n,k} = [t_{n,k-1}, t_{n,k}[$ viene decomposto dagl'intervalli $I_{n+1,h}$ in esso contenuti.
Sia $\mathscr{F}_n$ la σ-algebra generata da $\{I_{n,1}, \ldots, I_{n,q_n}\}$ (cioè l'insieme delle unioni di tali intervalli), cosicché $\mathscr{F}_n \subseteq \mathscr{F}_{n+1} \subseteq \mathscr{S}$. Sia assegnata un'arbitraria funzione Φ: $\{t_{n,k}$, $n \in N$, $1 \leq k \leq q_n\} \to X$ e si ponga

$$f_n(t) = \frac{\Phi(t_{n,k}) - \Phi(t_{n,k-1})}{t_{n,k} - t_{n,k-1}} \quad \forall t \in I_{n,k}$$

Allora è facile verificare che $(f_n)_{n \in N}$ è una martingala relativa a $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_n)_{n \in N}$
In particolare, se $X = R$, $T = 1$, $t_{n,k} = \frac{k}{2^n}$ e Φ è definita da $\Phi(0) = \Phi(1)$, $\Phi(\frac{2k-1}{2^{n+1}}) = \frac{1}{2}(\Phi(\frac{k}{2^n}) + \Phi(\frac{k-1}{2^n}) + \frac{1}{2^n})$, si ottiene $f_n(t) = \sum_{j=1}^{n} r_j(t)$, dove r_j è la j-esima funzione di Rademacher ($r_j(t) = (-1)^{k-1}$ per $\frac{k-1}{2^j} \leq t < \frac{k}{2^j}$)

2.4. Sia $\mathscr{F} = (\mathscr{F}_n)_{n \in N}$ una successione non decrescente di sotto-σ-

algebre di $\mathscr{S}$ e $F = (f_n)_{n\in N}$ una martingala in $L^p(\Omega,\mathscr{S},\mu;X)$ relativa a $\mathscr{F}$. Poniamo ancora $\phi_1 = f_1$, $\phi_{n+1} = f_{n+1} - f_n$. Sia $V = (v_n)_{n\in N}$ una successione di funzioni di $L^\infty(\Omega,\mathscr{S},\mu;K)$ e supponiamo che v_1 sia $\mathscr{F}_1$-misurabile e v_{n+1} sia $\mathscr{F}_n$-misurabile. Ponendo $\psi_n = v_n\phi_n$, la condizione 2.2(a) è ancora verificata (per provarlo basta approssimare v_{n+1} con funzioni $\mathscr{F}_n$-semplici), cosicché $G=(g_n)_{n\in N}$, dove $g_n = \sum_{k=1}^{n}\psi_k$, è ancora una martingala in $L^p(\Omega,\mathscr{S},\mu;X)$.

Nel caso in cui X=K è noto fin dal 1966 ([BUR1]) che $p\in]1,\infty[$ esiste $c_p\in R^+$ tale che comunque data una martingala F e una sua "trasformata" G ottenuta come sopra, se $\sup_n\|v_n\|_{L^\infty} \leq 1$, allora

(a) $$\|g_n\|_{L^p} \leq c_p \|f_n\|_{L^p} \qquad \forall n\in N$$

o, equivalentemente,

(b) $$\sup_n\|g_n\|_{L^p} \leq c_p \sup_n \|f_n\|_{L^p}$$

Quando X è uno spazio di Banach questa proprietà, in generale, non è vera, e si ha quindi la seguente definizione

2.5. <u>Definizione</u>. Si dice che uno spazio di Banach X ha la proprietà UMD (= unconditional martingale differences) quando esistono $p\in]1,\infty[$ e $c_p(X)\in R^+$ tali che per ogni martingala F in $L^p(\Omega,\mathscr{S},\mu;X)$ (dove lo spazio $(\Omega,\mathscr{S},\mu)$ è arbitrario) e per ogni sua trasformata G ottenuta come in 2.4 valgono le equivalenti disuguaglianze 2.4 (a), (b)

2.6. In realtà la classe UMD non dipende da $p\in]1,\infty[$, nel senso che se $\exists p\in]1,\infty[$ per il quale è soddisfatta la condizione della def. 2.4. allora tale condizione è soddisfatta $\forall p\in]1,\infty[$. Questa è conseguenza, per esempio, del teorema seguente

2.7. Teorema. Sia $p \in]1,\infty[$. Se per ogni coppia di martingale F,G delle quali G dipenda da F nel modo descritto in 2.4 (con $\sup_n \|v_n\|_{L^\infty} \leq 1$) vale una delle seguenti proprietà, allora per ogni coppia di tali martingale valgono anche le altre

(a) $\sup_n \|f_n\|_{L^1} < +\infty \Rightarrow (g_n(\cdot))_{n\in N}$ converge μ-q.d.

(b) $\exists c>0$ tale che se $\sup_n \|g_n(w)\| > 1$ μ-q.d., allora $\sup_n \|f_n\|_{L^1} \geq c$

(c) $\exists c>0$ tale che $\forall \lambda \in R^+$ $\lambda\mu(\{w; \sup_n \|g_n(w)\| > \lambda) \leq c \sup_n \|f_n\|_{L^1}$

(d) $\exists c>0$ tale che $\sup_n \|g_n\|_{L^p} \leq c \sup_n \|f_n\|_{L^p}$.

Inoltre, le proprietà (a)-(b)-(c)-(d) rimangono equivalenti tra loro, e definiscono la stessa classe di spazi se si conviene di limitare le successioni $V = (v_n)_{n\in N}$ a quelle per cui $\forall n$ v_n è una costante $\varepsilon_n \in \{-1,1\}$.

Per la dimostrazione si veda [BUR2], pp. 998-1003.

2.8. Elenchiamo alcune proprietà degli spazi di Banach UMD.

(a) Ogni spazio di Banach UMD è super-riflessivo (cioè isomorfo ad uno spazio uniformemente convesso), ma il contrario non è vero,

(b) Se X è UMD, anche X* lo è,

(c) Se X è UMD e $1<p<\infty$, ogni spazio $L^p(Y,\mathscr{F},\nu;X)$ con $(Y,\mathscr{F},\nu)$ arbitrario spazio con misura, è UMD,

(d) Ogni sottospazio chiuso di uno spazio UMD è UMD,

(e) Se X_1 e X_2 sono UMD, anche $X_1 \times X_2$ lo è.

2) PROPRIETA' EQUIVALENTI A UMD

3.1. Teorema. Uno spazio di Banach X è UMD se e solo se ζ-convesso.

Cenno di dimostrazione (v. [BUR2], [BUR4], [RdF]). Si prova che la ζ-convessità è equivalente a 2.7 (c), o meglio alla variante di 2.7 (c) quando la successione dei moltiplicatori $(v_k)_{k\in N}$ è costituita da costanti $\varepsilon_k \in \{-1,1\}$. A questo scopo, fissato $(x,y)\in X \times X$ sia $M(x,y)$ l'insieme delle martingale $F = (f_n)_{n\in N}$ in $L^1([0,1[;X)$ con $f_1(t) \equiv x$ e tali che per almeno una successione $\varepsilon = (1;\varepsilon_2,\varepsilon_3,\ldots)$ in $\{-1,1\}$ la martingala trasformata g sia tale che $\mu(\bigcup_{n\in N} \{t\in [0,1[;\ \|g_n(t)-y\| \geq 1\}) = 1$. Posto $\psi(x,y) = \inf\{\sup_n \|f_n\|_{L^1};$ $F = (f_n)_{n\in N} \in M(x,y)\}$, si prova (ed è la parte dura) che ψ è la massima delle funzioni ϕ: $X \times X \to R$ tali che

(a) $\phi(x,y) = \phi(x,2x-y)$

(b) $\phi(\cdot,y)$ è convessa $\forall y$

(c) $\phi(x,y) \leq \|x\|$ se $\|y\| \geq 1$.

Se $f\in M(0,0)$ si ha $\sup_n \|g_n(t)\| \geq 1$ q.d. su $[0,1[$, cosicché per $0<\lambda<1$ da 2.7(c) segue che $\lambda \leq c \sup_n \|f_n\|_{L^1}$ è quindi $\psi(0,0) \geq \frac{1}{c} > 0$. Ponendo $\xi(x,y)=2\psi(\frac{x+y}{2},y)$ si ottiene che $\xi\in Z_1(X,\|\cdot\|)$ (v. 1.4). Viceversa, se $\xi\in Z_1(X,\|\cdot\|)$, posto $\phi(x,y) = \frac{1}{2}\xi(2x-y,y)$, si ha che ϕ verifica (a), (b), (c), cosicché $\phi \leq \psi$, e quindi $\psi(0,0) \geq \phi(0,0) = \frac{1}{2}\xi(0,0) > 0$. Da qui si fa seguire 2.7 (c).

3.2. In particolare ogni spazio di Banach isomorfo a uno spazio di Hilbert è UMD e ogni spazio ζ-convesso è super-riflessivo. Dunque la ζ-convessità non è una proprietà di ogni spazio di Banach.

Dal punto di vista dell'analisi funzionale, la caratterizzazione più utile è certamente la seguente

3.3. Teorema. Per $1<p<\infty$, $f\in L^p(R,X)$ ed $\varepsilon\in R^+$ sia

$$(H_\varepsilon f)(t) = \frac{1}{\pi} \int_{|s|\geq\varepsilon} \frac{f(t-s)}{s}\,ds$$

(a) [BUR4]. Se X è UMD, allora $\forall p\in]1,\infty[\ \exists c_p(X)>0$ tale che $\forall f\in L^p(R,X)\ \|H_\varepsilon f\|_{L^p} \leq c_p(X)\|f\|_{L^p}$ (e quindi $\lim_{\varepsilon\to 0} H_\varepsilon f$ esiste q.d. e in L^p e verifica la stessa stima)

(b) [BOU]. Se $\exists p\in]1,\infty[$ tale che la trasformata di Hilbert sia limitata in $L^p(R,X)$, allora X è UMD.

La parte "dura" della dimostrazione di (a) consiste nel far vedere che:

se $a_1,\dots, a_N, b_1,\dots,b_N$ appartengono a X (dove $N\in\mathbf{N}$ è arbitrario), ponendo $u(re^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{N} (\cos(k\theta)a_k + \sin(k\theta)b_k)r^k$ $v(re^{i\theta}) = \sum_{k=1}^{N}(\sin(k\theta)a_k-(\cos k\theta)b_k)r^k$ $(0\leq r<1\ ,\ 0\leq\theta\leq 2\pi)$, allora $\int_0^{2\pi}\|v(re^{i\theta})\|^2 d\theta \leq c_p(X)\int_0^{2\pi}\|u(re^{i\theta})\|^p d\theta$, e questo si fa utilizzando martingale costruite con funzioni di Rademacher.

Dopo di ciò segue che la stessa stima vale quando $u(re^{i\theta}) =$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2} f(t)dt\ ,\quad v(re^{i\theta}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{2r\sin(\theta-t)}{1-2r\cos(\theta-t)+r^2} f(t)dt\ ,$$ essendo $f\in L^p(]-\pi,\pi[,X)$

Ora se $f\in L^p(]-\pi,\pi[,X)$, prolunghiamola per periodicità a R e poniamo $\tilde{f}_\varepsilon(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_{\varepsilon<|t|<\pi} f(\theta-t)\cot\frac{t}{2}\,dt$. Allora dalle stime precedenti segue che

$\|\tilde{f}_\varepsilon\|_{L^p} \leq c_p(X)\,\|f\|_{L^p}$, e da qui segue il risultato nel caso non-periodico come nel caso classico.

4) ALTRE PROPRIETA'

4.1. Dal teorema 3.3 segue immediatamente che se X e Y sono spazi UMD, tali sono anche $[X,Y]_\theta$ (spazi d'interpolazione complessa) e $(X,Y)_{\theta,q}$ (spazio d'interpolazione reale) quando $0<\theta<1$, $1<q<\infty$. Infatti (v. [T] 1.18.1)

$L^q(R,[X,Y]_\theta) = [L^q(R,X),\, L^q(R,Y)]_\theta$ e $L^q(R,(X,Y)_{\theta,q}) = (L^q(R,X),\, L^q(R,Y))_{\theta,q}$

4.2. Dal teorema 3.3 si può dedurre un risultato più generale. Supponiamo che X sia UMD e sia $\Omega: R^n\setminus\{0\} \to K$ una funzione pari, continua e omogenea di grado 0, tale che se w è il modulo di continuità di Ω sulla superficie della sfera unitaria sia

$\int_0^1 w(s)\,\frac{ds}{s} < +\infty$. Per $1\leq p<+\infty$, $\varepsilon\in R^+$ e $f\in L^p(R^n,X)$ sia $(T_\varepsilon f)(s) =$

$$= \int_{\|s-\sigma\|>\varepsilon} \frac{\Omega(s-\sigma)}{\|s-\sigma\|^n}\, f(\sigma)d\sigma \quad e$$

$$(T^*f)(s) = \sup_{\varepsilon>0} \|(T_\varepsilon f)(s)\|. \text{ Allora:}$$

(a) $(Tf)(s) = \lim_{\varepsilon\to 0+} (T_\varepsilon f)(s)$ esiste q.d.

(b) per $p>1$ esiste $c_p(X)>0$ tale che $\|T^*f\|_{L^p} \leq c_p(X)\|f\|_{L^p}$

(c) $\exists c_1(X)>0$ tale che $\forall\lambda>0$ $\mu(\{s;(T^*f)(s)>\lambda\}) \geq \frac{c_1(X)}{\lambda}\|f\|_{L^1}$

(d) T verifica (b) e (c) e $T_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0+]{} T$ in L^p per $1<p<\infty$.

Un interesse particolare riveste la possibilità di estendere una forma del teorema di Mihlin sui moltiplicatori di Fourier al caso di funzioni a valori in X. In proposito si osservi che Mihlin estese un risultato discreto di Marcinkiewicz [Ma] che veniva provato facendo ricorso, per funzioni di Rademacher, a disuguaglianze che in seguito sono state provate per martingale a valori scalari.

Nel caso vettoriale si ha la seguente versione (v. [McC]).

<u>4.3. Teorema</u>. Sia X uno spazio di Banach UMD e $m: R^n\setminus\{0\}\to X$ una funzione di classe C^{n+1}. Supponiamo che esista c_m tale che

$\forall\alpha\in(N\cup\{0\})^n$ con $|\alpha|\leq n+1$ si abbia $\sup_{\lambda\in R^n\setminus\{0\}} |\lambda^\alpha D^\alpha m(\lambda)| \leq c_m$.

Allora l'operatore T_m definito su $\mathscr{S}(R^n,X)$ da $T_m f = (m\hat{f})^\vee$ verifica la stima

$\|T_n f\|_{L^p} \leq C\,\|f\|_{L^p}$ $(1<p<\infty)$, dove C dipende solo da c_m,n,p e X.

4.4. Per ulteriori informazioni sull'argomento si può vedere [BGM], [C], [RRT].

BIBLIOGRAFIA

[BGM] E. BERKSON, T.A. GILLESPIE, P.S. MULHY, Abstract spectral decomposition guaranteed by the Hilbert transform. Proc. London Math. Soc. (3) 53 (1986), 489-517.

[BOU] J. BOURGAIN, Some remarks on Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional. Ark. Mat. 22 (1983), 163-168.

[BUR1] D.L. BURKHOLDER, Martingale transforms. Annals of Math. Statistics, 37 (1966), 1494-1504.

[BUR2] D.L. BURKHOLDER, A geometrical characterization of Banach spaces in which martingale difference sequences are unconditional. Ann. Probab. 9 (1981), 997-1011.

[BUR3] D.L. BURKHOLDER, Martingale transforms and the geometry of Banach spaces in Probability in Banach spaces III. Proceedings, Medford 1980, (A. Beck, ed.), Lecture Notes in Math. 860, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York 1981, pp. 35-50.

[BUR4] D.L. BURKHOLDER, A geometric condition that implies the existence of certain singular integrals of Banach-space-valued functions - in Conference on harmonic analysis in hour of Antoni Zygmard (W. Beckner, A.P. Calděron, R. Fefferman, P.W. Jones eds.). Wadsworth, Belmont 1983; vol. I, pp. 270--286.

[C] F. COBOS, Some spaces in which martingale difference sequences are unconditional, preprint.

[DU] J. DIESTEL, J.J. UHL jr. Vectur Measures. Math. Surveys n. 15; American Mathematical Society, Providence 1977.

[MA] J. MARCINKIEWICZ, Sur les multiplicateurs des sěries de Fourier. Studia Math. 8 (1939), 78-91.

[McC] T.R. McCONNELL, On Fourier multiplier transformations of Banach- valued functions. Trans. Amer. Math. Soc. 285 (1984), 739-757.

[RdF] J.L. RUBIO DE FRANCIA, Martingale and integral transforms of Banach space valued functions, preprint.

[RRT] J.L. RUBIO DE FRANCIA, F.J. RUIZ, J.L. TORREA, Calderon-Zygmund Theory for Operator-Valued Kernels. Adv. in Math. 62 (1986), 7-48.

[T] H. TRIEBEL, Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators, North Holland, Amsterdam/New York/Oxford, 1978.